OPTION P' - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve spécifique aux candidats de l'option P' comporte 3 pages.

Il est demandé <u>expressément</u> aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. <u>Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur</u>.

$\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs (0 compris).

$\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

Pour α élément de $\mathbb{R}_+$, t élément de $\mathbb{R}$, on définit l'application $f_{\alpha,t}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_{\alpha,t}(x) = \frac{x^{\alpha} e^{-tx}}{1+x^2} .$$

PARTIE I

1°) Déterminer l'ensemble C des couples (α,t) éléments de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tels que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{\alpha,t}(x)\,dx$ converge.

Si (α,t) appartient à C, on note $\phi_\alpha(t)$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{\alpha,t}(x)\,dx$,

et l'on définit ainsi une application ϕ_α d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par exemple, ϕ_0 applique $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

2°) a - Soient α un élément de $\mathbb{R}_+$, t_0 un élément de $\mathbb{R}_+^*$, h un réel non nul tels que : $|h| \leqslant \frac{1}{2} t_0$. Montrer l'inégalité :

$$\left| \frac{\phi_\alpha(t_0+h) - \phi_\alpha(t_0)}{h} + \phi_{\alpha+1}(t_0) \right| \leqslant \frac{4|h|}{t_0^2}\,\phi_\alpha\!\left(\frac{t_0}{2}\right)$$

b - Déduire de ce qui précède que ϕ_0 est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que l'on a :

$$(1) \qquad (\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*) \quad \left(\phi_0(t) + \phi_0''(t) = \frac{1}{t}\right)$$

3°) a - Soit $t \longmapsto a(t)$ une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. Montrer, pour t élément de $\mathbb{R}_+^*$, les inégalités :

$$(2) \qquad |\phi_0(t) - \phi_0(0)| \leqslant \frac{1}{2}\, t\, a^2(t) + \operatorname{Arctg} \frac{1}{a(t)}$$

$$(3) \qquad \phi_0(t) \leqslant \frac{1}{t} + \operatorname{Arctg} \frac{1}{a(t)}$$

b - Déduire de ce qui précède que ϕ_0 est continue sur $\mathbb{R}_+$, et vérifie : $\lim_{t\to+\infty} \phi_0(t) = 0$.

.../...

4°) Montrer que l'ensemble E des applications deux fois dérivables Φ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

(i) $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*)\ (\Phi(t) + \Phi''(t) = \frac{1}{t})$,

(ii) $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = 0$,

a exactement un élément.

PARTIE II

1°) a - Soient u,X des éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tels que : $u < X$, et v un réel .

Montrer : (4) $$\int_u^X \frac{\sin(x-v)}{x}\,dx = \frac{\cos(u-v)}{u} - \frac{\cos(X-v)}{X} - \int_u^X \frac{\cos(x-v)}{x^2}\,dx$$

b - Déduire de ce qui précède que, pour (u,v) élément de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_u^{+\infty} \frac{\sin(x-v)}{x}\,dx$, notée F (u,v) , est convergente, et est égale à :

$$\frac{\cos(u-v)}{u} - \int_u^{+\infty} \frac{\cos(x-v)}{x^2}\,dx .$$

2°) a - Soit ρ une application continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \rho(y)\,dy$ converge. On définit l'application R de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par : $R(s) = \int_s^{+\infty} \rho(y)\,dy$. Montrer que R est continûment dérivable, avec : $R'(s) = -\rho(s)$ pour tout s strictement positif.

b - En utilisant ce qui précède, et en apportant les justifications nécessaires, montrer que l'application f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = F(t,t)$, (F est définie en II - 1°) b) est indéfiniment dérivable, et que l'on a :

(5) $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*)\ (f(t) + f''(t) = \frac{1}{t})$

(6) $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*)\ \left(f(t) = \frac{1}{t} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(t+x)^2}\,dx\right)$

(7) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

3°) a - Montrer brièvement la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

b - Etablir avec soin, pour $t > 0$, l'inégalité :

(8) $$\left| f(t) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \right| \leqslant t\left[1 + \mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right] .$$

4°) En utilisant les résultats précédents, démontrer : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$, et en déduire les valeurs des intégrales absolument convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx .$$

... /

PARTIE III

1°) Montrer que, pour t réel, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x(1+x^2)}\,dx$ converge, ainsi que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}\,dx$.

On pose : $G(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x(1+x^2)}\,dx$; $K(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}\,dx$, et l'on définit ainsi des applications G et K de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2°) a - Justifier soigneusement, pour t > 0, les égalités :

$$(9) \qquad G(t) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{t^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 - x^2}{(t^2 + x^2)^2} \cos x \, dx$$

et en déduire : $\lim\limits_{t \to +\infty} G(t) = \frac{\pi}{2}$.

b - Montrer que l'on a : $|G(u) - G(v)| \leqslant \frac{\pi}{2} |u - v|$ pour u,v réels, et déduire de ce qui précède que G est une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

○○○○○
○○○○○